**专题05 函数周期性问题**

**一、结论**

**已知定义在上的函数,若对任意,总存在非零常数,使得,则称是周期函数,为其一个周期.除周期函数的定义外,还有一些常见的与周期函数有关的结论如下:**

**(1)如果(),那么是周期函数,其中的一个周期**

**(2)如果(),那么是周期函数,其中的一个周期.**

**(3)如果(),那么是周期函数,其中的一个周期.**

**(4)如果(),那么是周期函数,其中的一个周期.**

**(5)如果(),那么是周期函数,其中的一个周期.**

**(6)如果(),那么是周期函数,其中的一个周期.**

**二、典型例题**

1．（2021·全国·高考真题）已知函数的定义域为，为偶函数，为奇函数，则（ ）

A． B． C． D．

**【答案】B**

**【解析】**

**因为函数为偶函数，则，可得，**

**因为函数为奇函数，则，所以，，**

**所以，，即，**

**故函数是以为周期的周期函数，**

**因为函数为奇函数，则，**

**故，其它三个选项未知.**

**故选：B.**

**解法二：因为函数为偶函数，所以其图象关于对称，则函数的图象关于直线对称；所以；**

**又函数为奇函数，所以其关于对称；**

****

**通过图象平移伸缩变换，可以得到关于对称，进而关于对称；**

**可得：；综合（1）（2）可得；利用结论的周期为,故本题中的周期为**

**利用可得**

**【反思】本例中涉及周期性，奇偶性，对称性的综合问题，其中求解周期的常用结论需直接记忆，可直接使用，本文中的6个周期结论直接记忆，可快速求周期.**

**对称性问题：**

**①轴对称问题：关于对称，可得到如下结论中任意一个：；**

**②点对称问题：关于对称，可得到如下结论中任意一个：；**

2．（2021·全国·高考真题（理））设函数的定义域为，为奇函数，为偶函数，当时，．若，则（ ）

A． B． C． D．

**【答案】D**

**【解析】**

**令，由①得：，由②得：，**

**因为，所以，**

**令，由①得：，所以．**

**因为是奇函数，所以图象关于对称，所以关于对称，得：**

****

**因为是偶函数，所以图象关于对称；**

**，所以关于对称，得：**

**；综合（1）（2）得到：**

**得到**

**所以，再利用令代入：**

**故选：D．**

**【反思】本例中涉及周期性，奇偶性，对称性的综合问题，其中求解周期的常用结论需直接记忆，可直接使用，本文中的6个周期结论直接记忆，可快速求周期.**

**三、针对训练 举一反三**

1．（2008·湖北·高考真题（文））已知在*R*上是奇函数，且，当时，，则

A．-2 B．2 C．-98 D．98

【答案】A

【详解】

∵，∴是以4为周期的周期函数，由于为奇函数，

∴，而，即.

故选：A．

2．（2021·全国·模拟预测（文））已知定义在上的偶函数，对，有成立，当时，，则（ ）

A． B． C． D．

【答案】C

【详解】

依题意对，有成立，

令，则，

所以，故，

所以是周期为的周期函数，

故.

故选：C

3．（2021·江西·三模（理））已知函数的图象关于原点对称，且满足，且当时，，若，则（ ）

A． B． C． D．

【答案】C

【详解】

因为函数的图象关于原点对称，所以为奇函数，

因为，

故函数的周期为4，则；

而，所以由可得；

而，

解得.

故选：C*.*

4．（2021·四川·石室中学模拟预测（理））已知定义域为**R**的奇函数满足，当时，，则函数在上零点的个数为（ ）

A．10 B．11 C．12 D．13

【答案】D

【详解】

解：因为是定义域为**R**的奇函数，所以．

因为，令，得，

即，所以．

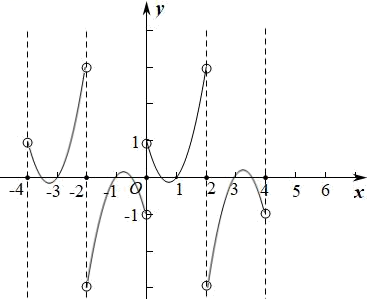
又因为为奇函数，所以，所以，

所以是以4为周期的周期函数．

根据周期性及奇函数的性质画出函数在上的图象，如图．

由图可知，函数在上有零点-4，-3.5，-3，-2，-1，-0.5，0，0.5，1，2，3，3.5，4，共13个零点．

故选：D



5．（2021·广西玉林·模拟预测（文））已知定义在上的偶函数满足，且当，，则下面结论正确的是（ ）

A． B．

C． D．

【答案】A

【详解】

由，知是周期函数，且周期为6，

∴，

∵，

∴，

∴，

又，

易知在内单调递增，

所以.

故选：A．

6．（2021·黑龙江·佳木斯一中三模（理））已知为奇函数且对任意，，若当时，，则（ ）

A． B．0 C．1 D．2

【答案】C

【详解】

解：因为为奇函数，即，

因为对任意，，

所以，

当时，，

所以，

所以，则.

故选：C.

7．（2021·浙江·瑞安中学模拟预测）已知函数是定义在*R*上的奇函数，满足，且当时，，则函数的零点个数是（ ）

A．2 B．3 C．4 D．5

【答案】B

【详解】

由可得关于对称，

由函数是定义在*R*上的奇函数，

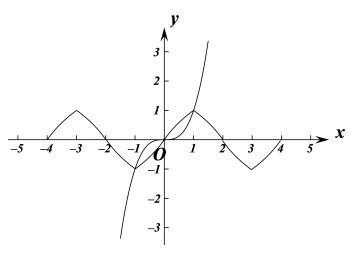
所以，

所以的周期为4，

把函数的零点问题即的解，

即函数和的图像交点问题，

根据的性质可得如图所得图形，结合的图像，



由图像可得共有3个交点，故共有3个零点，

故选：B.

8．（2021·陕西·模拟预测（文））已知定义在上的奇函数满足．当时，，则（ ）

A．3 B． C． D．5

【答案】A

【详解】

由条件可知，，且，

即，即，

那么，所以函数是周期为4的函数，

.

故选：A

9．（2021·全国·模拟预测）已知是定义在上的偶函数，且，．若，则\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【详解】

由可得，

又，所以．

由可得，

故，故的一个周期为8，则．

故答案为：.

10．（2021·陕西·二模（理））已知定义在*R*上的奇函数满足，且，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】5

因为，

所以，

所以，

所以函数是以16为周期的周期函数.

又在中，令得，

且奇函数是定义在*R*上的函数，所以，故，

所以.

又在中，令，得，

得，则，

所以.

故答案为：5